Odhad parametrů v hybridních systémech

Martin Dungl

27.06.2011

Obsah

Prezentace bude složena ze dvou částí

- Online filtering for hybrid systems - Presentation in Rome
- Aplikace teorie systémů hromadné obsluhy

Online Filtering For Hybrid Systems

Evgenia Suzdaleva[1], Ivan Nagy[2] and Martin Dungl[1]

[1]Department of Adaptive Systems
Institute of Information Theory and Automation
of the Academy of Sciences of the Czech Republic

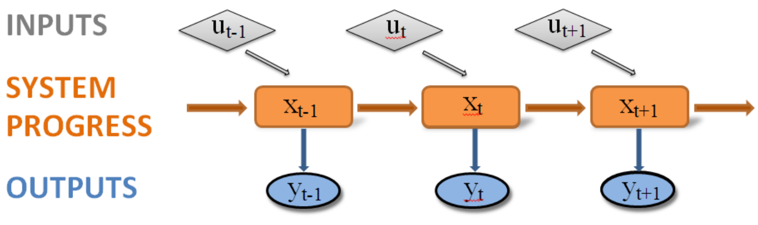
[2]Faculty of Transportation Sciences, Czech Technical University, Prague

Outline of the presentation

- Motivation and problem formulation
- General probabilistic solution
- Recursive filter for normal and multinomial models
- Experiment
- Conclusion

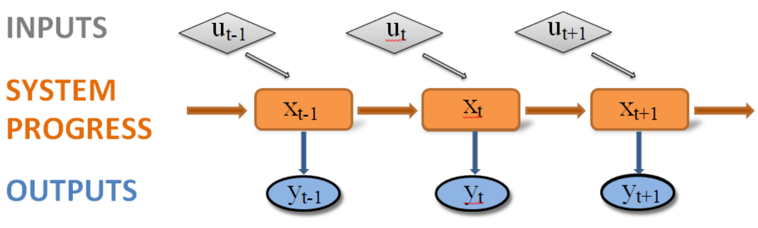
System example

System illustration



Question: What is going on in the system?

System illustration



Question: What is going on in the system?

Problem formulation

Hybrid system

- State of the hybrid system in time $t \in \{1, \ldots, T\}$:

$$x_t = [x_t^c, x_t^d]' = [x_{1,t}^c, \ldots, x_{C,t}^c, x_t^d]'$$

- Superscript c – continuous variables, d – discrete variables

Available data

$u_t = [u_t^c, u_t^d]'$ ... system inputs in time t,
$y_t = [y_t^c, y_t^d]'$ ... system outputs in time t,

The Goal

Estimate of x_t based on $(y_1, \ldots, y_t, u_1, \ldots, u_t) = d^t$
- *online filtering*.

Problem formulation

Hybrid system

- State of the hybrid system in time $t \in \{1, \ldots, T\}$:

$$x_t = [x_t^c, x_t^d]' = [x_{1,t}^c, \ldots, x_{C,t}^c, x_t^d]'$$

- Superscript c – continuous variables, d – discrete variables

Available data

$u_t = [u_t^c, u_t^d]'$ ... system inputs in time t,
$y_t = [y_t^c, y_t^d]'$ ... system outputs in time t,

The Goal

Estimate of x_t based on $(y_1, \ldots, y_t, u_1, \ldots, u_t) = d^t$
- *online filtering.*

Problem formulation

Hybrid system

- State of the hybrid system in time $t \in \{1, \dots, T\}$:

$$x_t \; = \; [x_t^c, x_t^d]' \; = \; [x_{1,t}^c, \dots, x_{C,t}^c, x_t^d]'$$

- Superscript c – continuous variables, d – discrete variables

Available data

$u_t = [u_t^c, u_t^d]'$ ... system inputs in time t,
$y_t = [y_t^c, y_t^d]'$ ... system outputs in time t,

The Goal

Estimate of x_t based on $(y_1, \dots, y_t, u_1, \dots, u_t) = d^t$
- *online filtering*.

State-space model and Bayesian filtering

- Generally, a state-space model consists of two models:

$$\begin{aligned} &\textit{observation model} && f\left(y_t \middle| x_t, u_t\right), \\ &\textit{state evolution model} && f\left(x_{t+1} \middle| x_t, u_t\right). \end{aligned}$$

- Basic facts:
  - Data updating (derived using Bayes' theorem):

$$\begin{aligned} f\left(x_t \middle| d^t\right) &= \frac{f\left(y_t \middle| x_t, u_t\right) f\left(x_t \middle| d^{t-1}\right)}{\int_{x^*} f\left(y_t \middle| x_t, u_t\right) f\left(x_t \middle| d^{t-1}\right) dx_t} \\ &\propto f\left(y_t \middle| x_t, u_t\right) f\left(x_t \middle| d^{t-1}\right), \end{aligned}$$

  - Time updating (from the Law of total probability):

$$f\left(x_{t+1} \middle| d^t\right) = \int_{x^*} f\left(x_{t+1} \middle| x_t, u_t\right) f\left(x_t \middle| d^t\right) dx_t$$

State-space model and Bayesian filtering

- Generally, a state-space model consists of two models:

$$\begin{aligned} \textit{observation model} \quad & f\left(y_t | x_t, u_t\right), \\ \textit{state evolution model} \quad & f\left(x_{t+1} | x_t, u_t\right). \end{aligned}$$

- Basic facts:
  - Data updating (derived using Bayes' theorem):

$$\begin{aligned} f\left(x_t | d^t\right) &= \frac{f\left(y_t | x_t, u_t\right) f\left(x_t | d^{t-1}\right)}{\int_{x^*} f\left(y_t | x_t, u_t\right) f\left(x_t | d^{t-1}\right) dx_t} \\ &\propto f\left(y_t | x_t, u_t\right) f\left(x_t | d^{t-1}\right), \end{aligned}$$

  - Time updating (from the Law of total probability):

$$f\left(x_{t+1} | d^t\right) = \int_{x^*} f\left(x_{t+1} | x_t, u_t\right) f\left(x_t | d^t\right) dx_t$$

State-space model and Bayesian filtering

- Generally, a state-space model consists of two models:

$$\begin{aligned} \textit{observation model} \qquad & f\left(y_t \middle| x_t, u_t\right), \\ \textit{state evolution model} \qquad & f\left(x_{t+1} \middle| x_t, u_t\right). \end{aligned}$$

- Basic facts:
  - Data updating (derived using Bayes' theorem):

$$\begin{aligned} f\left(x_t \middle| d^{\,t}\right) &= \frac{f\left(y_t \middle| x_t, u_t\right) f\left(x_t \middle| d^{\,t-1}\right)}{\int_{x^*} f\left(y_t \middle| x_t, u_t\right) f\left(x_t \middle| d^{\,t-1}\right)\, dx_t} \\ &\propto f\left(y_t \middle| x_t, u_t\right) f\left(x_t \middle| d^{\,t-1}\right), \end{aligned}$$

  - Time updating (from the Law of total probability):

$$f\left(x_{t+1} \middle| d^{\,t}\right) = \int_{x^*} f\left(x_{t+1} \middle| x_t, u_t\right) f\left(x_t \middle| d^{\,t}\right) dx_t$$

State-space model and Bayesian filtering

- Generally, a state-space model consists of two models:

$$\begin{array}{rl} \textit{observation model} & f\left(y_t \middle| x_t, u_t\right), \\ \textit{state evolution model} & f\left(x_{t+1} \middle| x_t, u_t\right). \end{array}$$

- Basic facts:
  - Data updating (derived using Bayes' theorem):

$$\begin{aligned} f\left(x_t \middle| d^{\,t}\right) &= \frac{f\left(y_t \middle| x_t, u_t\right) f\left(x_t \middle| d^{\,t-1}\right)}{\int_{x^*} f\left(y_t \middle| x_t, u_t\right) f\left(x_t \middle| d^{\,t-1}\right)\, dx_t} \\ &\propto f\left(y_t \middle| x_t, u_t\right) f\left(x_t \middle| d^{\,t-1}\right), \end{aligned}$$

  - Time updating (from the Law of total probability):

$$f\left(x_{t+1} \middle| d^{\,t}\right) = \int_{x^*} f\left(x_{t+1} \middle| x_t, u_t\right) f\left(x_t \middle| d^{\,t}\right) dx_t$$

State-space model and Bayesian filtering

- Generally, a state-space model consists of two models:

$$\begin{array}{rl} \textit{observation model} & f\left(y_t | x_t, u_t\right), \\ \textit{state evolution model} & f\left(x_{t+1} | x_t, u_t\right). \end{array}$$

- Basic facts:
  - Data updating (derived using Bayes' theorem):

$$\begin{aligned} f\left(x_t | d^{t}\right) &= \frac{f\left(y_t | x_t, u_t\right) f\left(x_t | d^{t-1}\right)}{\int_{x^*} f\left(y_t | x_t, u_t\right) f\left(x_t | d^{t-1}\right) \, dx_t} \\ &\propto f\left(y_t | x_t, u_t\right) f\left(x_t | d^{t-1}\right), \end{aligned}$$

  - Time updating (from the Law of total probability):

$$f\left(x_{t+1} | d^{t}\right) = \int_{x^*} f\left(x_{t+1} | x_t, u_t\right) f\left(x_t | d^{t}\right) dx_t$$

Online filtering - general case

- Together:

$$f\left(x_{t+1}\middle|d^{t}\right) \propto \int f(x_{t+1}|x_t, u_t)\left\{\underbrace{f(y_t|x_t, u_t)f(x_t|d^{t-1})}_{\propto f(x_t|d^t)}\right\} dx_t. \tag{1}$$

- $f(x_t|d^{t-1})$ stands for the *prior distribution*.

Hybrid system decomposition

- Decomposition of *observation* and *state evolution models*

$$
\begin{aligned}
f(y_t|x_t,u_t) &= f(y_t^c, y_t^d | x_t^c, x_t^d, u_t^c, u_t^d) \\
f(x_{t+1}|x_t,u_t) &= f(x_{t+1}^c, x_{t+1}^d | x_t^c, x_t^d, u_t^c, u_t^d)
\end{aligned}
$$

- Chain rule: $f(a,b|c) = f(a|b,c)f(b|c)$
- Models after using chain rule and reasonable omissions:

$$
\begin{aligned}
f(y_t|x_t,u_t) &= f(y_t^c|y_t^d, x_t^c, u_t^c) f(y_t^d|x_t^d, u_t^d) &(2)\\
f(x_{t+1}|x_t,u_t) &= f(x_{t+1}^c|x_{t+1}^d, x_t^c, u_t^c) f(x_{t+1}^d|x_t^d, u_t^d). &(3)
\end{aligned}
$$

- Prior distribution:

$$
f(x_t^c, x_t^d | d^{t-1}) = f(x_t^c | x_t^d, d^{t-1}) f(x_t^d | d^{t-1}) \qquad (4)
$$

Hybrid system decomposition

- Decomposition of *observation* and *state evolution models*

$$
\begin{aligned}
f(y_t|x_t,u_t) &= f(y_t^c,y_t^d|x_t^c,x_t^d,u_t^c,u_t^d)\\
f(x_{t+1}|x_t,u_t) &= f(x_{t+1}^c,x_{t+1}^d|x_t^c,x_t^d,u_t^c,u_t^d)
\end{aligned}
$$

- Chain rule: $f(a,b|c)=f(a|b,c)f(b|c)$
- Models after using chain rule and reasonable omissions:

$$
\begin{aligned}
f(y_t|x_t,u_t) &= f(y_t^c|y_t^d,x_t^c,u_t^c)f(y_t^d|x_t^d,u_t^d) \quad (2)\\
f(x_{t+1}|x_t,u_t) &= f(x_{t+1}^c|x_{t+1}^d,x_t^c,u_t^c)f(x_{t+1}^d|x_t^d,u_t^d). \quad (3)
\end{aligned}
$$

- Prior distribution:

$$
f(x_t^c,x_t^d|d^{t-1}) = f(x_t^c|x_t^d,d^{t-1})f(x_t^d|d^{t-1}) \quad (4)
$$

Hybrid system decomposition

- Decomposition of *observation* and *state evolution models*

$$
\begin{aligned}
f(y_t|x_t, u_t) &= f(y_t^c, y_t^d|x_t^c, x_t^d, u_t^c, u_t^d) \\
f(x_{t+1}|x_t, u_t) &= f(x_{t+1}^c, x_{t+1}^d|x_t^c, x_t^d, u_t^c, u_t^d)
\end{aligned}
$$

- Chain rule: $f(a, b|c) = f(a|b, c)f(b|c)$
- Models after using chain rule and reasonable omissions:

$$
\begin{aligned}
f(y_t|x_t, u_t) &= f(y_t^c|y_t^d, x_t^c, u_t^c)f(y_t^d|x_t^d, u_t^d) && (2) \\
f(x_{t+1}|x_t, u_t) &= f(x_{t+1}^c|x_{t+1}^d, x_t^c, u_t^c)f(x_{t+1}^d|x_t^d, u_t^d). && (3)
\end{aligned}
$$

- Prior distribution:

$$
f(x_t^c, x_t^d|d^{t-1}) = f(x_t^c|x_t^d, d^{t-1})f(x_t^d|d^{t-1}) \qquad (4)
$$

Hybrid system decomposition

- Decomposition of *observation* and *state evolution models*

$$
\begin{aligned}
f(y_t|x_t, u_t) &= f(y_t^c, y_t^d|x_t^c, x_t^d, u_t^c, u_t^d) \\
f(x_{t+1}|x_t, u_t) &= f(x_{t+1}^c, x_{t+1}^d|x_t^c, x_t^d, u_t^c, u_t^d)
\end{aligned}
$$

- Chain rule: $f(a, b|c) = f(a|b, c)f(b|c)$
- Models after using chain rule and reasonable omissions:

$$
\begin{aligned}
f(y_t|x_t, u_t) &= f(y_t^c|y_t^d, x_t^c, u_t^c)f(y_t^d|x_t^d, u_t^d) &\quad (2)\\
f(x_{t+1}|x_t, u_t) &= f(x_{t+1}^c|x_{t+1}^d, x_t^c, u_t^c)f(x_{t+1}^d|x_t^d, u_t^d). &\quad (3)
\end{aligned}
$$

- Prior distribution:

$$
f(x_t^c, x_t^d|d^{t-1}) = f(x_t^c|x_t^d, d^{t-1})f(x_t^d|d^{t-1}) \qquad (4)
$$

Hybrid system decomposition

- Decomposition of *observation* and *state evolution models*

$$
\begin{aligned}
f(y_t|x_t,u_t) &= f(y_t^c, y_t^d|x_t^c, x_t^d, u_t^c, u_t^d) \\
f(x_{t+1}|x_t,u_t) &= f(x_{t+1}^c, x_{t+1}^d|x_t^c, x_t^d, u_t^c, u_t^d)
\end{aligned}
$$

- Chain rule: $f(a,b|c) = f(a|b,c)f(b|c)$
- Models after using chain rule and reasonable omissions:

$$
\begin{aligned}
f(y_t|x_t,u_t) &= f(y_t^c|y_t^d, x_t^c, u_t^c)f(y_t^d|x_t^d, u_t^d) && (2) \\
f(x_{t+1}|x_t,u_t) &= f(x_{t+1}^c|x_{t+1}^d, x_t^c, u_t^c)f(x_{t+1}^d|x_t^d, u_t^d). && (3)
\end{aligned}
$$

- Prior distribution:

$$
f(x_t^c, x_t^d|d^{t-1}) = f(x_t^c|x_t^d, d^{t-1})f(x_t^d|d^{t-1}) \qquad (4)
$$

Online filtering - hybrid systems:

- Substituting models for hybrid systems ((3), (2) and (4)) into the general result (1), one obtains

$$f(x_{t+1}|d^t) \propto \int_{x^{c*}} \sum_{x^{d*}} \underbrace{f(x^c_{t+1}|x^d_{t+1}, x^c_t, u^c_t) f(x^d_{t+1}|x^d_t, u^d_t)}_{f(x_{t+1}|x_t,u_t)}$$

$$\times \underbrace{f(y^c_t|y^d_t, x^c_t, u^c_t) f(y^d_t|x^d_t, u^d_t)}_{f(y_t|x_t,u_t)} \underbrace{f(x^c_t|x^d_t, d^{t-1}) f(x^d_t|d^{t-1})}_{prior\ \ pdf} \, dx^c_t$$

$$= \underbrace{\sum_{x^{d*}} f(x^d_{t+1}|d^t) f(x^c_{t+1}|x^d_{t+1}, d^t)}_{sum\ \ of\ \ distributions} \quad (5)$$

- Sum of distributions is difficult to work with (for the use in recursion) - approximation by Kerridge inaccuracy (later)

Online filtering - hybrid systems:

- Substituting models for hybrid systems ((3), (2) and (4)) into the general result (1), one obtains

$$f(x_{t+1}|d^t) \propto \int_{x^{c*}} \sum_{x^{d*}} \underbrace{f(x^c_{t+1}|x^d_{t+1}, x^c_t, u^c_t) f(x^d_{t+1}|x^d_t, u^d_t)}_{f(x_{t+1}|x_t, u_t)}$$

$$\times \underbrace{f(y^c_t|y^d_t, x^c_t, u^c_t) f(y^d_t|x^d_t, u^d_t)}_{f(y_t|x_t, u_t)} \underbrace{f(x^c_t|x^d_t, d^{t-1}) f(x^d_t|d^{t-1})}_{prior\ \ pdf} \, dx^c_t$$

$$= \underbrace{\sum_{x^{d*}} f(x^d_{t+1}|d^t) f(x^c_{t+1}|x^d_{t+1}, d^t)}_{sum\ \ of\ \ distributions} \qquad (5)$$

- Sum of distributions is difficult to work with (for the use in recursion) - approximation by Kerridge inaccuracy (later)

Normal and multinomial models

Suppose the following distributions of variables:

y_t^c	K-dimensional normal distribution
y_t^d	one-dimensional multinomial distribution
x_t^c	C-dimensional normal distribution
x_t^d	one-dimensional multinomial distribution

- This choice is very universal

Normal and multinomial models

Suppose the following distributions of variables:

y_t^c	K-dimensional normal distribution
y_t^d	one-dimensional multinomial distribution
x_t^c	C-dimensional normal distribution
x_t^d	one-dimensional multinomial distribution

- This choice is very universal

Normal and multinomial models

- Substituting into (2) we get the observation model as the product of distributions:

$$f(y_t^c|y_t^d, x_t^c, u_t^c)f(y_t^d|x_t^d, u_t^d) = \mathcal{N}(Hx_t^c + Du_t^c, R_v)\alpha_{y_t^d|x_t^d u_t^d}$$

where $\alpha_{y_t^d=q|x_t^d=l, u_t^d=n}$ are known probabilities of output $y_t^d = q$ under conditions of $x_t^d = l$ and $u_t^d = n$, and it holds $\sum_q^Q \alpha_{q|ln} = 1$, $\alpha_{q|ln} \geq 0 \; \forall \; q, l, n$ and Q.

- The state evolution model (3) is in form

$$f(y_t^c|y_t^d, x_t^c, u_t^c)f(y_t^d|x_t^d, u_t^d) = \mathcal{N}(Hx_t^c + Du_t^c, R_v)\alpha_{y_t^d|x_t^d u_t^d}$$

where $\alpha_{y_t^d=q|x_t^d=l, u_t^d=n}$ are known probabilities of output $y_t^d = q$ under conditions of $x_t^d = l$ and $u_t^d = n$, and it holds $\sum_q^Q \alpha_{q|ln} = 1$, $\alpha_{q|ln} \geq 0 \; \forall \; q, l, n$ and Q.

Normal and multinomial models

- Substituting into (2) we get the observation model as the product of distributions:

$$f(y_t^c|y_t^d, x_t^c, u_t^c)f(y_t^d|x_t^d, u_t^d) = \mathcal{N}(Hx_t^c + Du_t^c, R_v)\alpha_{y_t^d|x_t^d u_t^d}$$

where $\alpha_{y_t^d=q|x_t^d=l, u_t^d=n}$ are known probabilities of output $y_t^d = q$ under conditions of $x_t^d = l$ and $u_t^d = n$, and it holds $\sum_q^Q \alpha_{q|ln} = 1$, $\alpha_{q|ln} \geq 0 \ \forall \ q, l, n$ and Q.

- The state evolution model (3) is in form

$$f(y_t^c|y_t^d, x_t^c, u_t^c)f(y_t^d|x_t^d, u_t^d) = \mathcal{N}(Hx_t^c + Du_t^c, R_v)\alpha_{y_t^d|x_t^d u_t^d}$$

where $\alpha_{y_t^d=q|x_t^d=l, u_t^d=n}$ are known probabilities of output $y_t^d = q$ under conditions of $x_t^d = l$ and $u_t^d = n$, and it holds $\sum_q^Q \alpha_{q|ln} = 1$, $\alpha_{q|ln} \geq 0 \ \forall \ q, l, n$ and Q.

Choice of prior distributions

- The prior distributions (4) $f(x_t^c|x_t^d, d^{t-1})f(x_t^d|d^{t-1})$ are specialized as

$$\mathcal{N}(\mu_{t|t-1}, P_{t|t-1})p_{x_t^d(t)}$$

- This is a product of
  - C-dimensional prior normal distribution with initial mean value $\mu_{t|t-1}$ and covariance $P_{t|t-1}$
  - Multinomial distribution in the form of the prior probability $p_{x_t^d=l(t)}$ of $x_t^d = l$, where $\sum_l^L p_{l(t)} = 1$, $p_{l(t)} \geq 0 \ \forall \ l$.

Choice of prior distributions

- The prior distributions (4) $f(x_t^c|x_t^d, d^{t-1})f(x_t^d|d^{t-1})$ are specialized as

$$\mathcal{N}(\mu_{t|t-1}, P_{t|t-1})p_{x_t^d(t)}$$

- This is a product of
  - C-dimensional prior normal distribution with initial mean value $\mu_{t|t-1}$ and covariance $P_{t|t-1}$
  - Multinomial distribution in the form of the prior probability $p_{x_t^d=l(t)}$ of $x_t^d = l$, where $\sum_l^L p_{l(t)} = 1$, $p_{l(t)} \geq 0 \; \forall \; l$.

Choice of prior distributions

- The prior distributions (4) $f(x_t^c|x_t^d, d^{t-1})f(x_t^d|d^{t-1})$ are specialized as

$$\mathcal{N}(\mu_{t|t-1}, P_{t|t-1})p_{x_t^d(t)}$$

- This is a product of
  - C-dimensional prior normal distribution with initial mean value $\mu_{t|t-1}$ and covariance $P_{t|t-1}$
  - Multinomial distribution in the form of the prior probability $p_{x_t^d=l(t)}$ of $x_t^d = l$, where $\sum_l^L p_{l(t)} = 1,\ p_{l(t)} \geq 0\ \forall\ l$.

Filter for normal and multinomial models

- The solution for normal models computationally coincides with the Kalman filter
  - We get the Kalman filter run for each value of x_t^d.
- The solution for multinomial models takes the form

$$p_{x_{t+1}^d}(t) = \beta_{l|1n}\alpha_{q|1n}p_{1(t)} + \beta_{l|2n}\alpha_{q|2n}p_{2(t)} + \dots + \beta_{l|Ln}\alpha_{q|Ln}p_{L(t)}$$

- The mixture distribution (5) has the form

$$\sum_{l=1}^{L} p_{l(t+1)}\mathcal{N}_l(\mu_{t+1|t}, P_{t+1|t}).$$

Filter for normal and multinomial models

- The solution for normal models computationally coincides with the Kalman filter
  - We get the Kalman filter run for each value of x_t^d.
- The solution for multinomial models takes the form

$$p_{x_{t+1}^d}(t) = \beta_{l|1n}\alpha_{q|1n}p_{1(t)} + \beta_{l|2n}\alpha_{q|2n}p_{2(t)} + \ldots + \beta_{l|Ln}\alpha_{q|Ln}p_{L(t)}$$

- The mixture distribution (5) has the form

$$\sum_{l=1}^{L} p_{l(t+1)}\mathcal{N}_l(\mu_{t+1|t}, P_{t+1|t}).$$

Filter for normal and multinomial models

- The solution for normal models computationally coincides with the Kalman filter
  - We get the Kalman filter run for each value of x_t^d.
- The solution for multinomial models takes the form

$$p_{x_{t+1}^d}(t) = \beta_{l|1n}\alpha_{q|1n}p_{1(t)} + \beta_{l|2n}\alpha_{q|2n}p_{2(t)} + \ldots + \beta_{l|Ln}\alpha_{q|Ln}p_{L(t)}$$

- The mixture distribution (5) has the form

$$\sum_{l=1}^{L} p_{l(t+1)}\mathcal{N}_l(\mu_{t+1|t}, P_{t+1|t}).$$

Filter for normal and multinomial models

- The solution for normal models computationally coincides with the Kalman filter
  - We get the Kalman filter run for each value of x_t^d.
- The solution for multinomial models takes the form

$$p_{x_{t+1}^d}(t) = \beta_{l|1n}\alpha_{q|1n}p_{1(t)} + \beta_{l|2n}\alpha_{q|2n}p_{2(t)} + \ldots + \beta_{l|Ln}\alpha_{q|Ln}p_{L(t)}$$

- The mixture distribution (5) has the form

$$\sum_{l=1}^{L} p_{l(t+1)}\mathcal{N}_l(\mu_{t+1|t}, P_{t+1|t}).$$

Kerridge inaccuracy aproximation

- This mixture distribution is replaced by the approximated normal distribution based on Kerrigde inaccuracy with

$$\hat{\mu}_{t+1|t} = \sum_{l=1}^{L} p_{l(t+1)} \mu_{l,t+1|t}, \tag{6}$$

$$\hat{P}_{t+1|t} = \sum_{l=1}^{L} p_{l(t+1)} P_{l,t+1|t} + \sum_{l=1}^{L} p_{l(t+1)} (\hat{\mu}_{t+1|t} - \mu_{l,t+1|t})^2 \tag{7}$$

where $\mu_{l,t+1}$ and $P_{l,t+1}$ denote results of the Kalman filter obtained for each value l. The approximation (6)-(7) is then used as the prior normal distribution for the next step of the recursion.

Experiment

- Testing of the algorithm for real traffic-control data from one of the controlled microregions in Prague
- Comparison of results with those of the Hidden Markov Models (HMM) algorithms available in standard package of MATLAB.

Experiment

- Testing of the algorithm for real traffic-control data from one of the controlled microregions in Prague
- Comparison of results with those of the Hidden Markov Models (HMM) algorithms available in standard package of MATLAB.

Used data

- x_t^c - four-dimensional queue length of cars
- x_t^d - level of service (LoS) with 4 possible values: from 1 (the best) to 4 (the worst)
- y_t^c - four-dimensional intensity of outgoing cars measured by a detector
- u_t^c - relative time of green light
- $t = 1, \ldots, 288$ - one day, 5 minutes long intervals

Used data

- x_t^c - four-dimensional queue length of cars
- x_t^d - level of service (LoS) with 4 possible values: from 1 (the best) to 4 (the worst)
- y_t^c - four-dimensional intensity of outgoing cars measured by a detector
- u_t^c - relative time of green light
- $t = 1, \ldots, 288$ - one day, 5 minutes long intervals

Used data

- x_t^c - four-dimensional queue length of cars
- x_t^d - level of service (LoS) with 4 possible values: from 1 (the best) to 4 (the worst)
- y_t^c - four-dimensional intensity of outgoing cars measured by a detector
- u_t^c - relative time of green light
- $t = 1, \ldots, 288$ - one day, 5 minutes long intervals

Results and comparison with HMM

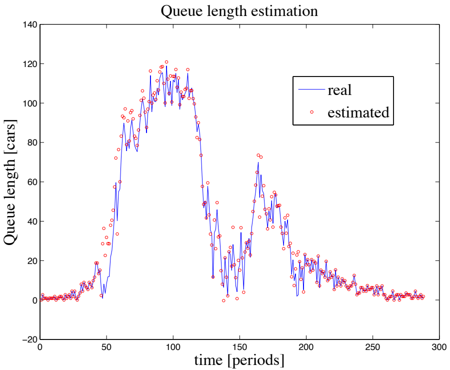


Figure: Online filtering of car queue length

Results and comparison with HMM

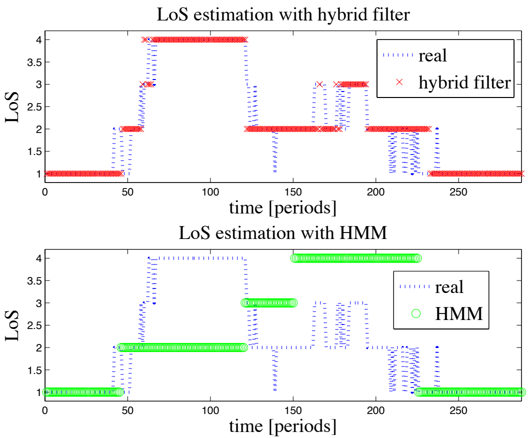


Figure: LoS estimation with the hybrid filter (top) and the HMM (bottom)

Conclusion

To summarize, important features of the proposed theory are that

- the algorithms used run in online mode,
- numerical procedures are applied only in that parts, which can not be computed analytically. In this way the amount of computations as well as the risk of collapsing is minimized,
- general probabilistic approach is universal for the distributions used,
- it opens a way to recursive estimation of discrete system modes dependent on evolution of continuous states. This is planned for future research.

Questions

Thank you for your attention.
Time for your questions.

Modely hromadné obsluhy

Martin Dungl

27.06.2011

Obsah

Obsah

Obsah

Fenomén call center

Čerpám z článku pojednávajícího o call centrech, lze nalézt mnoho podobností s některými systémy. Něco o call centrech:

- Pro mnoho společností se jedná o preferovanou cestu komunikace se zákazníky
- V USA a Velké Británii příbuzná odvětví zaměstnávají asi 3% pracovní síly
- Zajímavá jsou pro nás call centra zaměřená na příchozí hovory
- V případě, že jsou všichni agenti zaneprázdněni, čekají další zákazníci, kteří se dovolali, ve frontě.

Fenomén call center

Čerpám z článku pojednávajícího o call centrech, lze nalézt mnoho podobností s některými systémy. Něco o call centrech:

- Pro mnoho společností se jedná o preferovanou cestu komunikace se zákazníky
- V USA a Velké Británii příbuzná odvětví zaměstnávají asi 3% pracovní síly
- Zajímavá jsou pro nás call centra zaměřená na příchozí hovory
- V případě, že jsou všichni agenti zaneprázdněni, čekají další zákazníci, kteří se dovolali, ve frontě.

Úspěchy

Křižovatka může být *skoro plná*, a stále funguje bez velkých front. Alespoň, lze-li nalézt analogie:

- Ve velkých call centrech telefonují agenti asi 90-95% svého pracovního času
- Asi 50% zákazníků je spojeno přímo s agentem. Ostatní se zařadí do fronty, s agentem jsou však spojeni během několika vteřin.
- Jen 1% zákazníků, kteří se dovolají, ukončí hovor před spojením s agentem.

Úspěchy

Křižovatka může být *skoro plná*, a stále funguje bez velkých front. Alespoň, lze-li nalézt analogie:

- Ve velkých call centrech telefonují agenti asi 90-95% svého pracovního času
- Asi 50% zákazníků je spojeno přímo s agentem. Ostatní se zařadí do fronty, s agentem jsou však spojeni během několika vteřin.
- Jen 1% zákazníků, kteří se dovolají, ukončí hovor před spojením s agentem.

Modelování systému

- Obecně hovoříme o systémech hromadné obsluhy nebo o teorii front.
- Má-li čas mezi dvěma vstupy do systému exponenciální rozdělení, lze použít aparát markovských řetězců se spojitým časem
- Toto zjednodušení může být problematické

Outline

1. Úvod
2. Trocha teorie
   - Procesy se spojitým časem
   - Poissonův proces
   - Systémy hromadné obsluhy a fronty typu $M/M/\infty$
   - Fronty typu $M/M/s$
3. Závěr

Procesy se spojitým časem
Základní definice

Definice:
Markovovým řetězcem se spojitým časem a spočetnou množinou stavů S rozumíme systém celočíselných náhodných veličin $\{X_t, t \geq 0\}$, které jsou definovány na stejném pravděpodobnostním prostoru a pro které platí

$$P(X_{s+t} = j | X_s = i) = P(X_{s+t} = j | X_s = i, (X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) = (i_1, \ldots, i_n))$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $i, j, i_1, \ldots, i_n \in S$, $s, t > 0$, $0 \leq t_k < s$, pro která má pravá strana rovnice smysl. Zavádíme značení

$$P(X_{s+t} = j | X_s = i) = p_{ij}(s, s+t)$$

Procesy se spojitým časem
Předpoklady

- Předpokládáme homogenitu, tj. $p_{ij}(s, s+t)$ nezávisí na s. Značíme $p_{ij}(t)$. Odtud definujeme pro každé $t > 0$ matici pravděpodobností přechodu $\boldsymbol{P}(t)$ s prvky $p_{ij}(t)$.
- Lze dokázat, že $q_{ij} = \lim_{t \to 0_+} \frac{p_{ij}(t)}{t}$ a $q_i = \lim_{t \to 0_+} \frac{1-p_{ij}(t)}{t}$ existují pro každé $i, j \in S$. Dále předpokládáme, že platí $\sum_{j \neq i} q_{ij} = q_i$ pro každé $i \in S$.
- Číslo q_{ij} nazýváme *Intenzita přechodu ze stavu i do stavu j*. Položíme $q_{ii} = -q_i$ pro $i \in S$. Matici $\boldsymbol{Q} = \{q_{ij}, i, j \in S\}$ nazýváme *Matice intenzit přechodu*.

Procesy se spojitým časem

Význam matice intenzit přechodu

- Označme T_i dobu, po kterou zůstává řetězec ve stavu i poté, co do něj v nějakém (libovolném) čase vstoupil. Lze dokázat, že T_i je náhodná veličina, která má exponenciální rozdělení o parametru q_i. Platí tedy $P(T_i < t) = 1 - e^{-q_i t}$ a $\mathbf{E}[T_i] = \frac{1}{q_i}$.

Procesy se spojitým časem
Limitní rozdělení

- Existuje-li pro všechna $i, j \in S$ $lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = a_j$, nazýváme $\boldsymbol{a} = \{a_j, j \in S\}$ *limitní rozdělení* řetězce.
- Mějme nerozložitelný Markovův řetězec $\{X_t, t \geq 0\}$ s trvalými stavy, který má matici intenzit $\boldsymbol{Q}$. Jestliže existuje

$$\pi = \{\pi_j, \sum_{j \in S} \pi_j = 1\} \quad : \qquad \pi^T \boldsymbol{Q} = 0,$$

jedná se o limitní rozdělení tohoto řetězce. Jestliže takové π neexistuje, nemá řetězec limitní rozdělení.

Procesy se spojitým časem

Limitní rozdělení

- Existuje-li pro všechna $i, j \in S$ $lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = a_j$, nazýváme $\boldsymbol{a} = \{a_j, j \in S\}$ *limitní rozdělení* řetězce.
- Mějme nerozložitelný Markovův řetězec $\{X_t, t \geq 0\}$ s trvalými stavy, který má matici intenzit $\boldsymbol{Q}$. Jestliže existuje

$$\boldsymbol{\pi} = \{\pi_j, \sum_{j\in S} \pi_j = 1\} \quad : \qquad \boldsymbol{\pi}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{Q} = 0,$$

jedná se o limitní rozdělení tohoto řetězce. Jestliže takové $\boldsymbol{\pi}$ neexistuje, nemá řetězec limitní rozdělení.

Procesy se spojitým časem

Limitní rozdělení

- Existuje-li pro všechna $i, j \in S$ $lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = a_j$, nazýváme $\boldsymbol{a} = \{a_j, j \in S\}$ *limitní rozdělení* řetězce.
- Mějme nerozložitelný Markovův řetězec $\{X_t, t \geq 0\}$ s trvalými stavy, který má matici intenzit $\boldsymbol{Q}$. Jestliže existuje

$$\boldsymbol{\pi} = \{\pi_j, \sum_{j\in S} \pi_j = 1\} \quad : \qquad \boldsymbol{\pi}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{Q} = 0,$$

jedná se o limitní rozdělení tohoto řetězce. Jestliže takové $\boldsymbol{\pi}$ neexistuje, nemá řetězec limitní rozdělení.

Outline

Poissonův proces

Definice a význam

- Modelový příklad náhodného procesu.
- Události se vyskytují náhodně v čase, na sobě nezávisle. X_t značí počet událostí, ke kterým došlo do času t.
- Lze jimi modelovat chování zákazníků, např. takto lze popsat množství hovorů přicházejících na ústřednu.
- Předpokládáme, že v intervalu $(t, t+h]$ dojde k právě jedné události s pravděpodobností $\lambda h + o(h)$, $\lambda > 0$, a k více než jedné události s pravděpodobností $o(h)$.

Poissonův proces
Vlastnosti

- Poissonův proces lze popsat maticí intenzit

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

- Lze dokázat, že pro absolutní pravděpodobnosti v čase t platí

$$p_j(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^j}{j!}, \quad 0 \leq j < \infty, \quad t > 0.$$

Počet událostí v libovolné množině délky t má tedy Poissonovo rozdělení s parametrem λt.

Outline

Systémy hromadné obsluhy
Předpoklady

- Do systému přicházejí zákazníci, po obsloužení jej opouštějí.
- V systému existuje s tzv. stanic obsluhy, s je pevné, $s \in \mathbb{N} \cup \infty$. Každá stanice může obsluhovat nejvýše jednoho zákazníka.
- Pro popis některých systémů se hodí volit $s \in \mathbb{R}_+$ udávající kapacitu systému.
- Doby mezi příchody po sobě jdoucích zákazníků jsou nezávislé exponenciálně rozdělené náhodné veličiny, stejně jako doby obsluhy jednotlivých zákazníků.
- Je-li kapacita zaplněna, tvoří zákazníci frontu.

Matematický popis

- Systém popisuje trojice $A/B/s$, kde A udává rozdělení doby mezi příchody zákazníků, B udává rozdělení doby obsluhy jednotlivých zákazníků a s je počet stanic obsluhy
- Uvažujeme případ $A \in \text{Exp}(\lambda)$ a $B \in \text{Exp}(\mu)$.

Matematický popis

- Systém popisuje trojice $A/B/s$, kde A udává rozdělení doby mezi příchody zákazníků, B udává rozdělení doby obsluhy jednotlivých zákazníků a s je počet stanic obsluhy
- Uvažujeme případ $A \in \mathrm{Exp}(\lambda)$ a $B \in \mathrm{Exp}(\mu)$.

Matematický popis

- Systém popisuje trojice $A/B/s$, kde A udává rozdělení doby mezi příchody zákazníků, B udává rozdělení doby obsluhy jednotlivých zákazníků a s je počet stanic obsluhy
- Uvažujeme případ $A \in \mathrm{Exp}(\lambda)$ a $B \in \mathrm{Exp}(\mu)$.

Fronty typu $M/M/\infty$

Matice intenzit přechodu

- Nejprve nechť $s = \infty$.
- Pro matici intenzit přechodu $\boldsymbol{Q}$ platí

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu & -\lambda-\mu & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2\mu & -\lambda-2\mu & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3\mu & -\lambda-3\mu & \lambda & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Fronty typu $M/M/\infty$

Limitní rozdělení - výsledek

- Lze dokázat, že limitní rozdělení počtu zákazníků v systému má Poissonovo rozdělení s parametrem $\frac{\lambda}{\mu}$.

Outline

Fronty typu $M/M/s$

Matice intenzit přechodu

- Prvních s řádků a sloupců matice intenzit se neliší od předchozí matice:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu & -\lambda-\mu & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2\mu & -\lambda-2\mu & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3\mu & -\lambda-3\mu & \lambda & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Následující řádky vypadají následovně:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & s\mu & -\lambda-s\mu & \lambda & 0 & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Fronty typu $M/M/s$

Limitní rozdělení

- Pro výpočet limitního rozdělení dostáváme

$$\pi_i = \frac{\pi_0 (\frac{\lambda}{\mu})^i}{i!} \qquad i = 0, 1, \dots, s$$

$$\pi_i = \frac{\pi_0 s^s}{s!} \left(\frac{\frac{\lambda}{\mu}}{s}\right)^i \qquad i = s+1, s+2, \dots$$

- π_0 se pak vypočítá z následujícího vztahu:

$$\pi_0 \left(\sum_{i=0}^{s} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}{i!} + \sum_{i=s+1}^{\infty} \frac{s^s}{s!} \left(\frac{\frac{\lambda}{\mu}}{s}\right)^i \right) = 1$$

Fronty typu $M/M/s$

Limitní rozdělení

- Pro výpočet limitního rozdělení dostáváme

$$\pi_i = \frac{\pi_0 (\frac{\lambda}{\mu})^i}{i!} \qquad i = 0, 1, \dots, s$$

$$\pi_i = \frac{\pi_0 s^s}{s!} \left(\frac{\frac{\lambda}{\mu}}{s} \right)^i \qquad i = s+1, s+2, \dots$$

- π_0 se pak vypočítá z následujícího vztahu:

$$\pi_0 \left(\sum_{i=0}^{s} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}{i!} + \sum_{i=s+1}^{\infty} \frac{s^s}{s!} \left(\frac{\frac{\lambda}{\mu}}{s} \right)^i \right) = 1$$

Fronty typu $M/M/s$

Kdy limitní rozdělení neexistuje

- Je vidno, že limitní rozdělení existuje, právě když $\frac{\lambda}{\mu} < s$.
- Existuje, právě když je v systému více stanic obsluhy, nežli střední hodnota počtu obsazených stanic v systému $M/M/\infty$ (při stejném λ a μ).

Fronty typu $M/M/s$

Chování systému - spočtěme:

- Střední počet zákazníků v systému:

$$M = \sum_{i=0}^{\infty} i\pi_i$$

- Střední délku fronty:

$$\mathbf{E}[F] = \sum_{i=s+1}^{\infty} (s-i)\pi_i$$

- Střední počet obsluhovaných zákazníků

$$\mathbf{E}[B] = \sum_{i=0}^{s} i\pi_i + \sum_{i=s+1}^{\infty} s\pi_i = \frac{\lambda}{\mu}$$

Fronty typu $M/M/s$

Chování systému - spočtěme:

- Střední počet zákazníků v systému:

$$M = \sum_{i=0}^{\infty} i\pi_i$$

- Střední délku fronty:

$$\mathbf{E}[F] = \sum_{i=s+1}^{\infty} (s-i)\pi_i$$

- Střední počet obsluhovaných zákazníků

$$\mathbf{E}[B] = \sum_{i=0}^{s} i\pi_i + \sum_{i=s+1}^{\infty} s\pi_i = \frac{\lambda}{\mu}$$

Fronty typu $M/M/s$

Chování systému - spočtěme:

- Střední počet zákazníků v systému:

$$M = \sum_{i=0}^{\infty} i\pi_i$$

- Střední délku fronty:

$$\mathbf{E}[F] = \sum_{i=s+1}^{\infty} (s-i)\pi_i$$

- Střední počet obsluhovaných zákazníků

$$\mathbf{E}[B] = \sum_{i=0}^{s} i\pi_i + \sum_{i=s+1}^{\infty} s\pi_i = \frac{\lambda}{\mu}$$

Fronty typu $M/M/s$

Chování systému

- Pravděpodobnost, že nově příchozí zákazník nemusí čekat na obsluhu

$$P_N = \sum_{i=0}^{s-1} \pi_i$$

- Dále je zajímavé zjistit, za jak dlouho se dostane v průměru nově příchozí zákazník na řadu. Označme tuto veličinu DC (jako "doba cekani"). Platí:

$$\mathbf{E}[DC] = \mathbf{E}[DC\mathbb{I}_{F=0} + DC\mathbb{I}_{F=1} + DC\mathbb{I}_{F=2} + \dots]$$

Fronty typu $M/M/s$

Chování systému

- Pravděpodobnost, že nově příchozí zákazník nemusí čekat na obsluhu

$$P_N = \sum_{i=0}^{s-1} \pi_i$$

- Dále je zajímavé zjistit, za jak dlouho se dostane v průměru nově příchozí zákazník na řadu. Označme tuto veličinu *DC* (jako "doba cekani"). Platí:

$$\mathbf{E}[DC] = \mathbf{E}[DC\mathbb{I}_{F=0} + DC\mathbb{I}_{F=1} + DC\mathbb{I}_{F=2} + \dots]$$

Fronty typu $M/M/s$

Chování systému

- Úpravami dostaneme následující (hrůzný) vzorec:

$$\mathbf{E}[DC] = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\pi_{s+i-1} \int_{t=0}^{\infty} t \frac{\mathrm{d}\left[1 - \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(s\mu t)^j e^{-s\mu t}}{j!}\right]}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t \right)$$

Fronty typu $M/M/s$

Simulace, položil jsem $\mu = 1$

λ	0.9	2.7	9	90	900	47
s	1	3	10	100	1000	50
$\frac{(\frac{\lambda}{\mu})}{s}$	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.94
M	9.0	10.05	15.02	91.95	900.05	55.90
$\mathbf{E}[F]$	8.1	7.35	6.02	1.95	0.05	8.90
$\mathbf{E}[B]$	0.9	2.7	9	90	900	47
P_N	0.1	0.1829	0.3313	0.7831	0.9994	0.4320
$\mathbf{E}[DC]$	9.0	2.7236	0.6687	0.0217	0.0000	0.1901

- Lze postupovat zpětne - při znalosti výsledků, jako $\mathbf{E}[F]$, $\mathbf{E}[B]$, P_N a $\mathbf{E}[DC]$, lze odhadnout parametry systému (prvky matice intenzit přechodu).
- Tento odhad může sloužit k odhadu matic H, D, P z Kalmanova filtru, které považujeme v předchozí části za známé.
- Proveditelné až ad hoc podle parametrů systému
- Diskrétní veličiny mohou odpovídat obecnějším stavům systému - každý z nich je popsaný jinou maticí přechodu

Závěr

Děkuji za pozornost, prostor na Vaše otázky.