Vlastnosti portfolií přípustných vzhledem k stochastické dominanci

Martin Dungl

Inspirováno diplomovou prací na MFF UK

2011

Obsah

Obsah

Obsah

Obsah

Obsah

Obsah

Viz. powerpoint.

Množiny užitkových funkcí

- Koncept stochastické dominance pracuje s *užitkovými funkcemi* jednotlivých investorů.
- Množina všech přípustných užitkových funkcí:

$$\mathbb{U} = \{u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad u(x) \text{ je neklesající na } \mathbb{R}\}.$$

Množiny užitkových funkcí

- Koncept stochastické dominance pracuje s *užitkovými funkcemi* jednotlivých investorů.
- Množina všech přípustných užitkových funkcí:

$$\mathbb{U} = \{u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad u(x) \text{ je neklesající na } \mathbb{R}\}.$$

Množiny užitkových funkcí

- Zabýváme se těmito podmnožinami $\mathbb{U}$:

$$
\begin{aligned}
U_1 &= \text{množina spojitých neklesajících funkcí} \\
U_2 &= \text{množina konkávních neklesajících funkcí} \\
U_3 &= \text{podmnožina } U_2 \text{ s nezápornou 3. derivací} \\
U_\infty &= \bigcap_{N=1}^{\infty} U_N \\
U_E^* &= \{u \in \mathbb{U} : u(x) = ae^{kx} + b, a < 0, k < 0, b \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}
$$

Předpoklady

S čím dále pracujeme

- Možné finanční výstupy investičních příležitostí (aktiv) jsou reprezentovány náhodnými veličinami. Aktiva tak lze s náhodnými veličinami ztotožnit. Množinu všech přípustných aktiv značíme $\mathbb{X}$.
- Investoři maximalizují svůj užitek.

Předpoklady

S čím dále pracujeme

- Možné finanční výstupy investičních příležitostí (aktiv) jsou reprezentovány náhodnými veličinami. Aktiva tak lze s náhodnými veličinami ztotožnit. Množinu všech přípustných aktiv značíme $\mathbb{X}$.
- Investoři maximalizují svůj užitek.

Stochastická dominance

- **Definice:** Buď $U \subset \mathbb{U}$. Řekneme, že náhodná veličina X *(stochasticky) dominuje* náhodnou veličinu Y vzhledem k množině U, jestliže

$$\mathbb{E}u(X) \geq \mathbb{E}u(Y) \qquad \forall u \in U,\ \text{je-li nerovnost definována.}$$

Zapisujeme $X \succeq_U Y$. Množinu U nazýváme *generátorem stochastické dominance* $\succeq_U$.

- Platí-li navíc pro nějakou funkci $u_0 \in U$ ostrá nerovnost, řekneme, že náhodná veličina X *striktně (stochasticky) dominuje* náhodnou veličinu Y vzhledem k množině U. Značíme $X \succ_U Y$.

Stochastická dominance

- **Definice:** Buď $U \subset \mathbb{U}$. Řekneme, že náhodná veličina X *(stochasticky) dominuje* náhodnou veličinu Y vzhledem k množině U, jestliže

$$\mathbb{E}u(X) \geq \mathbb{E}u(Y) \qquad \forall u \in U, \text{ je-li nerovnost definována.}$$

  Zapisujeme $X \succeq_U Y$. Množinu U nazýváme *generátorem stochastické dominance* $\succeq_U$.

- Platí-li navíc pro nějakou funkci $u_0 \in U$ ostrá nerovnost, řekneme, že náhodná veličina X *striktně (stochasticky) dominuje* náhodnou veličinu Y vzhledem k množině U. Značíme $X \succ_U Y$.

Obsah

Několik pojmů

..aneb proč se v práci slovo *eficientní* příliš nevyskytuje

- Budeme pracovat s těmito specifikacemi aktiv, která někteří označují jako eficienci:
  - Přijatelnost
  - Optimalita

Několik pojmů

..aneb proč se v práci slovo *eficientní* příliš nevyskytuje

- Budeme pracovat s těmito specifikacemi aktiv, která někteří označují jako eficienci:
  - Přijatelnost
  - Optimalita

Definice

Přijatelnost a optimalita

Definice: Mějme množinu přípustných aktiv $\mathbb{X}$ a generátor stochastické dominance $U \subset \mathbb{U}$. Řekneme, že aktivum $X \in \mathbb{X}$ je vzhledem k U

- nepřijatelné, jestliže $\exists Y \in \mathbb{X} \quad Y \succ_U X$.
- přijatelné, jestliže není nepřijatelné.
- optimální, jestliže

$$\exists u \in U, u \text{ rostoucí na } \mathbb{R} \qquad \mathbb{E}u(X) \geq \mathbb{E}u(Y) \qquad \forall Y \in \mathbb{X}.$$

- Množiny přijatelných a optimálních aktiv se liší jen v limitních případech

Definice

Přijatelnost a optimalita

Definice: Mějme množinu přípustných aktiv $\mathbb{X}$ a generátor stochastické dominance $U \subset \mathbb{U}$. Řekneme, že aktivum $X \in \mathbb{X}$ je vzhledem k U

- nepřijatelné, jestliže $\exists Y \in \mathbb{X} \quad Y \succ_U X$.
- přijatelné, jestliže není nepřijatelné.
- optimální, jestliže

$$\exists u \in U, u \text{ rostoucí na } \mathbb{R} \qquad \mathbb{E}u(X) \geq \mathbb{E}u(Y) \qquad \forall Y \in \mathbb{X}.$$

- Množiny přijatelných a optimálních aktiv se liší jen v limitních případech

Definice

Přijatelnost a optimalita

Definice: Mějme množinu přípustných aktiv $\mathbb{X}$ a generátor stochastické dominance $U \subset \mathbb{U}$. Řekneme, že aktivum $X \in \mathbb{X}$ je vzhledem k U

- nepřijatelné, jestliže $\exists Y \in \mathbb{X} \quad Y \succ_U X$.
- přijatelné, jestliže není nepřijatelné.
- optimální, jestliže

$$\exists u \in U, u \text{ rostoucí na } \mathbb{R} \qquad \mathbb{E}u(X) \geq \mathbb{E}u(Y) \qquad \forall Y \in \mathbb{X}.$$

- Množiny přijatelných a optimálních aktiv se liší jen v limitních případech

Definice

Přijatelnost a optimalita

Definice: Mějme množinu přípustných aktiv $\mathbb{X}$ a generátor stochastické dominance $U \subset \mathbb{U}$. Řekneme, že aktivum $X \in \mathbb{X}$ je vzhledem k U

- nepřijatelné, jestliže $\exists Y \in \mathbb{X} \quad Y \succ_U X$.
- přijatelné, jestliže není nepřijatelné.
- optimální, jestliže

$$\exists u \in U, u \text{ rostoucí na } \mathbb{R} \qquad \mathbb{E}u(X) \geq \mathbb{E}u(Y) \qquad \forall Y \in \mathbb{X}.$$

- Množiny přijatelných a optimálních aktiv se liší jen v limitních případech

Scénářový přístup

Dále jej budeme předpokládat

- Uvažujme konečný počet aktiv m a konečný počet stejně pravděpodobných scénářů n. Buď $\mathbf{X}_{n \times m}$ matice s lineárně nezávislými sloupci, že

$$\mathbf{X}_{ij} = \text{výnos j-tého aktiva při i-tém scénáři.}$$

- **Definice:** Množiny přípustných portfolií pro matici výnosů $\mathbf{X}_{n \times m}$.
Povolené krátké prodeje: $\Theta = \{\theta \in \mathbb{R}^m : \mathbf{1}'\theta = 1\}$.
Krátké prodeje omezené koeficientem $a \in (-\infty, 0]$:

$$\Theta_a = \{\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m)' \in \mathbb{R}^m : \mathbf{1}'\theta = 1, \theta_i \geq a, i = 1, \ldots, m\}.$$

Scénářový přístup
Dále jej budeme předpokládat

- Uvažujme konečný počet aktiv m a konečný počet stejně pravděpodobných scénářů n. Buď $\mathbf{X}_{n\times m}$ matice s lineárně nezávislými sloupci, že

$$\mathbf{X}_{ij} = \text{výnos j-tého aktiva při i-tém scénáři.}$$

- **Definice:** Množiny přípustných portfolií pro matici výnosů $\mathbf{X}_{n\times m}$.
Povolené krátké prodeje: $\Theta = \{\theta \in \mathbb{R}^m : \mathbf{1}'\theta = 1\}$.
Krátké prodeje omezené koeficientem $a \in (-\infty, 0]$:

$$\Theta_a = \{\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)' \in \mathbb{R}^m : \mathbf{1}'\theta = 1, \theta_i \geq a, i = 1, \dots, m\}.$$

Interpretace a poznámky

- Volně řečeno: Sloupce matice $\mathbf{X}$ odpovídají výnosům m lineárně nezávislých aktiv, řádky reprezentují n stejně pravděpodobných scénářů. Dále připouštíme aktiva vzniklá kombinacemi sloupců podle koeficientů z množiny přípustných portfolií.
- Všechny pojmy definujeme pro přípustné portfolio θ pomocí aktiva reprezentovaného vektorem $\mathbf{X}\theta$.

Obsah

Tvar množin přijatelných a optimálních portfolií

Souvislost

- Množiny portfolií optimálních vzhledem ke stochastické dominanci prvního řádu, při zakázaných krátkých prodejích, obecně nejsou souvislé. (Kopa, Post, 2009)
- Analyzoval jsem souvislost množin portfolií optimálních vzhledem k obloukově souvislým generátorům tvořeným striktně konkávními funkcemi, při omezených krátkých prodejích.

Tvar množin přijatelných a optimálních portfolií

Souvislost

- Množiny portfolií optimálních vzhledem ke stochastické dominanci prvního řádu, při zakázaných krátkých prodejích, obecně nejsou souvislé. (Kopa, Post, 2009)
- Analyzoval jsem souvislost množin portfolií optimálních vzhledem k obloukově souvislým generátorům tvořeným striktně konkávními funkcemi, při omezených krátkých prodejích.

Tvar množin přijatelných a optimálních portfolií

Konvexita

- V případě stochastické dominance prvního řádu není ani jedna z 'eficientních' množin obexně konvexní.
- Množina portfolií optimálních vzhledem k U_2 není obecně konvexní, jak při omezených, tak při povolených krátkých prodejích (Dybvig, Ross, 1983).
- Množina portfolií přijatelných vzhledem k U_N a U_∞ není při zakázaných krátkých prodejích obecně konvexní (Kopa, 2008).
- V práci jsem nalezl nutnou a postačující podmínku pro rozměry matice výnosů $\mathbf{X}$, zaručující konvexitu množiny portfolií optimálních vzhledem k U_E^*, při povolených krátkých prodejích.

Tvar množin přijatelných a optimálních portfolií

Konvexita

- V případě stochastické dominance prvního řádu není ani jedna z 'eficientních' množin obexně konvexní.
- Množina portfolií optimálních vzhledem k U_2 není obecně konvexní, jak při omezených, tak při povolených krátkých prodejích (Dybvig, Ross, 1983).
- Množina portfolií přijatelných vzhledem k U_N a U_∞ není při zakázaných krátkých prodejích obecně konvexní (Kopa, 2008).
- V práci jsem nalezl nutnou a postačující podmínku pro rozměry matice výnosů $\mathbf{X}$, zaručující konvexitu množiny portfolií optimálních vzhledem k U_E^*, při povolených krátkých prodejích.

Tvar množin přijatelných a optimálních portfolií

Konvexita

- V případě stochastické dominance prvního řádu není ani jedna z 'eficientních' množin obexně konvexní.
- Množina portfolií optimálních vzhledem k U_2 není obecně konvexní, jak při omezených, tak při povolených krátkých prodejích (Dybvig, Ross, 1983).
- Množina portfolií přijatelných vzhledem k U_N a U_∞ není při zakázaných krátkých prodejích obecně konvexní (Kopa, 2008).
- V práci jsem nalezl nutnou a postačující podmínku pro rozměry matice výnosů $\mathbf{X}$, zaručující konvexitu množiny portfolií optimálních vzhledem k U_E^*, při povolených krátkých prodejích.

Tvar množin přijatelných a optimálních portfolií

Konvexita

- V případě stochastické dominance prvního řádu není ani jedna z 'eficientních' množin obexně konvexní.
- Množina portfolií optimálních vzhledem k U_2 není obecně konvexní, jak při omezených, tak při povolených krátkých prodejích (Dybvig, Ross, 1983).
- Množina portfolií přijatelných vzhledem k U_N a U_∞ není při zakázaných krátkých prodejích obecně konvexní (Kopa, 2008).
- V práci jsem nalezl nutnou a postačující podmínku pro rozměry matice výnosů $\mathbf{X}$, zaručující konvexitu množiny portfolií optimálních vzhledem k U_E^*, při povolených krátkých prodejích.

Souvislost množiny optimálních portfolií

Definice

Souvislost a oblouková souvislost

- Podmnožina $A \subset M$ metrického prostoru (M, ρ) je souvislá, jestliže neexistují neprázdné otevřené množiny A_1, A_2 splňující

$$A = A_1 \cup A_2 \qquad \text{a} \qquad A_1 \cap A_2 = \emptyset.$$

- Podmnožina $A \subset M$ metrického prostoru (M, ρ) je obloukově souvislá, jestliže mezi každou dvojicí jejich bodů lze sestrojit spojitý oblouk, tedy

$$\forall x, y \in A \quad \exists f : [0, 1] \to (A, \rho) \text{ spojitá,}$$

splňující $f(0) = x, \quad f(1) = y$.

- Obloukově souvislá množina je souvislá.

Definice

Souvislost a oblouková souvislost

- Podmnožina $A \subset M$ metrického prostoru (M, ρ) je souvislá, jestliže neexistují neprázdné otevřené množiny A_1, A_2 splňující
$$A = A_1 \cup A_2 \qquad \text{a} \qquad A_1 \cap A_2 = \emptyset.$$
- Podmnožina $A \subset M$ metrického prostoru (M, ρ) je obloukově souvislá, jestliže mezi každou dvojicí jejich bodů lze sestrojit spojitý oblouk, tedy
$$\forall x, y \in A \quad \exists f : [0, 1] \to (A, \rho) \text{ spojitá},$$
splňující $f(0) = x, \quad f(1) = y$.
- Obloukově souvislá množina je souvislá.

Hlavní výsledek kapitoly

Věta:
Buď $U \subset \hat{U}$ množina užitkových funkcí obloukově souvislá vzhledem k supremové metrice ρ a nechť $a \in (-\infty, 0]$. Pak množina portfolií z Θ_a optimálních vzhledem k U je obloukově souvislá.

Obsah

Předpoklady

- Připomeňme $U_E^* = \{u : u(x) = ae^{kx} + b, a < 0, k < 0, b \in \mathbb{R}\}$ a definujme $U_E = \{u : u(x) = -e^{kx}, k < 0\}$. Práce s oběma generátory je pro stochastickou dominanci ekvivalentní. Volíme množinu U_E.
- Pro vyšetřování souvislosti pracujeme s množinou přípustných portfolií Θ_a, $a \in (-\infty, 0]$, omezení a může být libovolně volné. Pro vyšetřování konvexity pracujeme s množinou Θ.

Předpoklady

- Připomeňme $U_E^* = \{u : u(x) = ae^{kx} + b, a < 0, k < 0, b \in \mathbb{R}\}$ a definujme $U_E = \{u : u(x) = -e^{kx}, k < 0\}$. Práce s oběma generátory je pro stochastickou dominanci ekvivalentní. Volíme množinu U_E.
- Pro vyšetřování souvislosti pracujeme s množinou přípustných portfolií Θ_a, $a \in (-\infty, 0]$, omezení a může být libovolně volné. Pro vyšetřování konvexity pracujeme s množinou Θ.

Obsah

Souvislost množiny optimálních portfolií

- Množina $\Theta_a, a \in (-\infty, 0]$ a generátor U_E.
- Množina optimálních portfolií je souvislá pro každou matici $\mathbf{X}_{n \times m}$ s linárně nezávislými sloupci - aplikace věty dokázané v předchozí části.

Souvislost množiny optimálních portfolií

- Množina $\Theta_a, a \in (-\infty, 0]$ a generátor U_E.
- Množina optimálních portfolií je souvislá pro každou matici $\mathbf{X}_{n \times m}$ s linárně nezávislými sloupci - aplikace věty dokázané v předchozí části.

Obsah

Specifikace úlohy

- Pracujeme s generátorem U_E. Mějme matici výnosů $\mathbf{X}_{n \times m}$ s lineárně nezávislými sloupci $(X_1, \ldots, X_m)$ a označme množinu optimálních portfolií $\mathcal{E}$, kde je $\mathcal{E} \subset \Theta$. Dále označme $\mathcal{E}^* = \mathbf{X}\mathcal{E}$.
- **Úloha:** Rozhodněte, při kterých rozměrech $\mathbf{X}$ je $\mathcal{E}$ obecně konvexní.
- Místo konvexity $\mathcal{E}$ lze ekvivalentně vyšetřovat konvexitu $\mathcal{E}^*$.
- Úlohu jsem převedl na hledání tvaru množiny dané rovnicemi s exponenciálami. (matematická analýza)

Specifikace úlohy

- Pracujeme s generátorem U_E. Mějme matici výnosů $\mathbf{X}_{n\times m}$ s lineárně nezávislými sloupci $(X_1, \ldots, X_m)$ a označme množinu optimálních portfolií $\mathcal{E}$, kde je $\mathcal{E} \subset \Theta$. Dále označme $\mathcal{E}^* = \mathbf{X}\mathcal{E}$.
- **Úloha:** Rozhodněte, při kterých rozměrech $\mathbf{X}$ je $\mathcal{E}$ obecně konvexní.
- Místo konvexity $\mathcal{E}$ lze ekvivalentně vyšetřovat konvexitu $\mathcal{E}^*$.
- Úlohu jsem převedl na hledání tvaru množiny dané rovnicemi s exponenciálami. (matematická analýza)

Specifikace úlohy

- Pracujeme s generátorem U_E. Mějme matici výnosů $\mathbf{X}_{n\times m}$ s lineárně nezávislými sloupci $(X_1, \ldots, X_m)$ a označme množinu optimálních portfolií $\mathcal{E}$, kde je $\mathcal{E} \subset \Theta$. Dále označme $\mathcal{E}^* = \mathbf{X}\mathcal{E}$.
- **Úloha:** Rozhodněte, při kterých rozměrech $\mathbf{X}$ je $\mathcal{E}$ obecně konvexní.
- Místo konvexity $\mathcal{E}$ lze ekvivalentně vyšetřovat konvexitu $\mathcal{E}^*$.
- Úlohu jsem převedl na hledání tvaru množiny dané rovnicemi s exponenciálami. (matematická analýza)

Závěry vyšetřování konvexity

Rozměry matice $\mathbf{X}_{n \times m}$ zaručující konvexitu $\mathcal{E}$

- $m = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}$ je konvexní.
- $m = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}$ je konvexní.
  - Konvexita $\mathcal{E}$ vyplývá ze souvislosti této množiny.
- $m = n \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}$ je konvexní.
  - Důkaz konvexity využívá skutečnost, že prostor S je jednorozměrný.
- V ostatních případech $\mathcal{E}$ obecně konvexní není.

Závěry vyšetřování konvexity

Rozměry matice $\mathbf{X}_{n\times m}$ zaručující konvexitu $\mathcal{E}$

- $m = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}$ je konvexní.
- $m = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}$ je konvexní.
  - Konvexita $\mathcal{E}$ vyplývá ze souvislosti této množiny.
- $m = n \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}$ je konvexní.
  - Důkaz konvexity využívá skutečnost, že prostor S je jednorozměrný.
- V ostatních případech $\mathcal{E}$ obecně konvexní není.

Závěry vyšetřování konvexity

Rozměry matice $\mathbf{X}_{n \times m}$ zaručující konvexitu $\mathcal{E}$

- $m = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}$ je konvexní.
- $m = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}$ je konvexní.
  - Konvexita $\mathcal{E}$ vyplývá ze souvislosti této množiny.
- $m = n \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}$ je konvexní.
  - Důkaz konvexity využívá skutečnost, že prostor S je jednorozměrný.
- V ostatních případech $\mathcal{E}$ obecně konvexní není.

Závěry vyšetřování konvexity

Rozměry matice $\mathbf{X}_{n \times m}$ zaručující konvexitu $\mathcal{E}$

- $m = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}$ je konvexní.
- $m = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}$ je konvexní.
  - Konvexita $\mathcal{E}$ vyplývá ze souvislosti této množiny.
- $m = n \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}$ je konvexní.
  - Důkaz konvexity využívá skutečnost, že prostor S je jednorozměrný.
- V ostatních případech $\mathcal{E}$ obecně konvexní není.

Závěry vyšetřování konvexity 2

Matice výnosů $\mathbf{X}$ o rozměrech 4×3 nezaručuje konvexitu $\mathcal{E}$

- Nechť $m = 3$, $n = 4$. Pak existuje matice $\mathbf{X}_{4\times3}$ s lineárně nezávislými sloupci, pro kterou množina $\mathcal{E}$ není konvexní.

Závěry vyšetřování konvexity 3

Protipříklad pro úlohu $m = 3$, $n = 4$

- Protipříklad. Zvolme

$$\begin{aligned} c &= 3 \cdot \frac{2^{-\frac{8}{13}} - 2^{-\frac{12}{13}}}{1 - 2^{-\frac{12}{13}}} &\approx\quad 0.796 \\ d &= 3 \cdot \frac{1 - 2^{-\frac{8}{13}}}{2 - 2^{-\frac{1}{13}}} &\approx\quad 1.102 \end{aligned}$$

a položme

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 4 & 4 & 4 + c \\ 3 & 3 & 3 + d \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Portfolia $(1,0,0)', (-3,4,0)' \in \mathcal{E}$, portfolio $(-1,2,0)' \notin \mathcal{E}$

Závěry vyšetřování konvexity 3

Protipříklad pro úlohu $m = 3$, $n = 4$

- Protipříklad. Zvolme

$$\begin{aligned} c &= 3 \cdot \frac{2^{-\frac{8}{13}} - 2^{-\frac{12}{13}}}{1 - 2^{-\frac{12}{13}}} &\approx 0.796 \\ d &= 3 \cdot \frac{1 - 2^{-\frac{8}{13}}}{2 - 2^{-\frac{1}{13}}} &\approx 1.102 \end{aligned}$$

a položme

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 4 & 4 & 4 + c \\ 3 & 3 & 3 + d \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Portfolia $(1, 0, 0)'$, $(-3, 4, 0)' \in \mathcal{E}$, portfolio $(-1, 2, 0)' \notin \mathcal{E}$

Závěry vyšetřování konvexity 4

Rozšíření výsledku pro $m = 3$, $n = 4$ pro matice $\mathbf{X}$ vyšší dimenze

- Za pomoci uvedené matice lze protipříklad rozšířit pro $m \geq 3$ a $n \geq m + 1$.
- Jedná se pouze o technické úpravy.

Závěry vyšetřování konvexity 4

Rozšíření výsledku pro $m = 3$, $n = 4$ pro matice $\mathbf{X}$ vyšší dimenze

- Za pomoci uvedené matice lze protipříklad rozšířit pro $m \geq 3$ a $n \geq m + 1$.
- Jedná se pouze o technické úpravy.

Obsah

- Portfolio optimální vzhledem k U_E je přijatelné
- Obecná implikace neplatí pouze v limitních případech

Příklad

Přijatelné portfolio nemusí být optimální

- Mějme matici
$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$
a testujme přijatelnost a optimalitu portfolia $\tau = (1, 0)'$
- Uvažujeme generátor U_E a povolené krátké prodeje.
- Vypočteme, že portfolio τ je přijatelné, ale není optimální.
- Tento příklad ukazuje, že se množiny striktně přijatelných a optimálních portfolií obecně liší.

Příklad

Přijatelné portfolio nemusí být optimální

- Mějme matici

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

  a testujme přijatelnost a optimalitu portfolia $\tau = (1, 0)'$
- Uvažujeme generátor U_E a povolené krátké prodeje.
- Vypočteme, že portfolio τ je přijatelné, ale není optimální.
- Tento příklad ukazuje, že se množiny striktně přijatelných a optimálních portfolií obecně liší.

Příklad

Přijatelné portfolio nemusí být optimální

- Mějme matici

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

  a testujme přijatelnost a optimalitu portfolia $\tau = (1, 0)'$
- Uvažujeme generátor U_E a povolené krátké prodeje.
- Vypočteme, že portfolio τ je přijatelné, ale není optimální.
- Tento příklad ukazuje, že se množiny striktně přijatelných a optimálních portfolií obecně liší.

Příklad

Přijatelné portfolio nemusí být optimální

- Mějme matici
$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$
a testujme přijatelnost a optimalitu portfolia $\tau = (1, 0)'$
- Uvažujeme generátor U_E a povolené krátké prodeje.
- Vypočteme, že portfolio τ je přijatelné, ale není optimální.
- Tento příklad ukazuje, že se množiny striktně přijatelných a optimálních portfolií obecně liší.

Spojení přijatelnosti a optimality

Po zvolení vhodných předpokladů

- Uvažujme krátké prodeje omezené libovolným pevným $a \in (-\infty, 0]$.
- Pro pevné $p < -1$ zaveďme generátor

$$U_E^l(p) = \left\{ u : u(x) = -(te^{kx} + (1-t)e^{lx}), k \in \left[p, \frac{1}{p}\right], l \in \left[p, \frac{1}{p}\right], t \in [0,1] \right\}.$$

- Pro pevné $\tau \in \Theta_a$ definujeme $f_\tau : (\Theta_a \times \mathbb{U}) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$f_\tau(\theta, u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[u((\mathbf{X}\theta)_i) - u((\mathbf{X}\tau)_i) \right].$$

Spojení přijatelnosti a optimality

Po zvolení vhodných předpokladů

- Uvažujme krátké prodeje omezené libovolným pevným $a \in (-\infty, 0]$.
- Pro pevné $p < -1$ zaveďme generátor

$$U'_E(p) = \left\{ u : u(x) = -(te^{kx} + (1-t)e^{lx}), k \in \left[p, \frac{1}{p}\right], l \in \left[p, \frac{1}{p}\right], t \in [0,1] \right\}.$$

- Pro pevné $\tau \in \Theta_a$ definujeme $f_\tau : (\Theta_a \times \mathbb{U}) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$f_\tau(\theta, u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[u((\mathbf{X}\theta)_i) - u((\mathbf{X}\tau)_i) \right].$$

Spojení přijatelnosti a optimality

Po zvolení vhodných předpokladů

- Uvažujme krátké prodeje omezené libovolným pevným $a \in (-\infty, 0]$.
- Pro pevné $p < -1$ zaveďme generátor

$$\begin{aligned} U_E^l(p) &= \left\{ u : u(x) = -(te^{kx} + (1-t)e^{lx}), k \in \left[p, \frac{1}{p}\right], \right. \\ & \left. l \in \left[p, \frac{1}{p}\right], t \in [0,1] \right\}. \end{aligned}$$

- Pro pevné $\tau \in \Theta_a$ definujeme $f_\tau : (\Theta_a \times \mathbb{U}) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$f_\tau(\theta, u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[u((\mathbf{X}\theta)_i) - u((\mathbf{X}\tau)_i) \right].$$

Spojení přijatelnosti a optimality

Jako důsledek minimaxové věty

- Lze dokázat, že pro libovolné $\tau \in \Theta_a$ je

$$\max_{\theta \in \Theta_a} \min_{v \in U_E'(p)} f_\tau(\theta, v) = \sup_{\theta \in \Theta_a} \inf_{v \in U_E'(p)} f_\tau(\theta, v) =$$

$$= \inf_{v \in U_E'(p)} \sup_{\theta \in \Theta_a} f_\tau(\theta, v) = \min_{v \in U_E'(p)} \max_{\theta \in \Theta_a} f_\tau(\theta, v).$$

- Má-li tento výraz nulovou hodnotu, je portfolio τ optimální i přijatelné. Platí i opačná implikace.

Spojení přijatelnosti a optimality

Jako důsledek minimaxové věty

- Lze dokázat, že pro libovolné $\tau \in \Theta_a$ je

$$\max_{\theta \in \Theta_a} \min_{v \in U_E'(p)} f_\tau(\theta, v) = \sup_{\theta \in \Theta_a} \inf_{v \in U_E'(p)} f_\tau(\theta, v) =$$
$$= \inf_{v \in U_E'(p)} \sup_{\theta \in \Theta_a} f_\tau(\theta, v) = \min_{v \in U_E'(p)} \max_{\theta \in \Theta_a} f_\tau(\theta, v).$$

- Má-li tento výraz nulovou hodnotu, je portfolio τ optimální i přijatelné. Platí i opačná implikace.

Obsah

Burza

- Na pražské burze se k 28. 2. 2007 obchodovalo 9 titulů a chování burzy jako celku bylo (a stále je) reprezentováno indexem PX

Název akcie	Váha
CETV	6,36%
ČEZ	22,40%
ERSTE BANK	24,33%
KOMERČNÍ BANKA	14,06%
ORCO	2,93%
PHILIP MORRIS ČR	2,17%
TELEFÓNICA O2 C.R.	18,37%
UNIPETROL	4,47%
ZENTIVA	4,92%

Složení portfolia Pražské burzy PX

Předpoklady

- Pomocí historických dat bylo odhadnuto sdružené rozdělení výnosů v horizontu 1 týdne
- Vyplacená dividenda se 'převede' na růst ceny aktiva
- Uvažujme stochastickou dominanci 2. řádu (generátor U_2) a zakázané krátké prodeje

Výsledky

- Pro ověření přijatelnosti se použije Kopův test (Kopa M.: Utility functions in portfolio optimization, disertační práce MFF UK, 2006)
- Test ukazuje, že portfolio τ, odpovídající indexu PX, je striktně dominováno jiným portfoliem λ^*

Název akcie	Váha v $\boldsymbol{\tau}$	Váha v $\boldsymbol{\lambda}^*$
CETV	6,36%	9%
ČEZ	22,40%	0%
ERSTE BANK	24,33%	24%
KOMERČNÍ BANKA	14,06%	1,9%
ORCO	2,93%	22,8%
PHILIP MORRIS ČR	2,17%	0%
TELEFÓNICA O2 C.R.	18,37%	38,4%
UNIPETROL	4,47%	3,9%
ZENTIVA	4,92%	0%

Tabulka 4.1: Srovnání složení portfolia $\boldsymbol{\tau}$ s dominujícím portfoliem $\boldsymbol{\lambda}^*$

Výsledky

Zpět k Markowitzovu modelu

	τ	λ^*
EX	0,53 %	0,60 %
σ	2,54 %	2,28%

Tabulka 4.2: Střední hodnoty a směrodatné odchylky týdenních výnosů tržního portfolia τ a dominujícího SSD eficietního portfolia λ^*

Závěr

Závěr

- Přístup k hledání optimálního aktiva jsme rozdělili do dvou částí a obě představili.
- Pojednali jsme o konceptu stochastické dominance.
- Formulovali jsme podmínky pro souvislost a konvexitu množiny optimálních portfolií.
- Ukázali jsme blízkost definic přijatelnosti a optimality.
- Ověřili jsme, že index PX nereprezentuje přijatelné portfolio.

Závěr

- Přístup k hledání optimálního aktiva jsme rozdělili do dvou částí a obě představili.
- Pojednali jsme o konceptu stochastické dominance.
- Formulovali jsme podmínky pro souvislost a konvexitu množiny optimálních portfolií.
- Ukázali jsme blízkost definic přijatelnosti a optimality.
- Ověřili jsme, že index PX nereprezentuje přijatelné portfolio.

Závěr

- Přístup k hledání optimálního aktiva jsme rozdělili do dvou částí a obě představili.
- Pojednali jsme o konceptu stochastické dominance.
- Formulovali jsme podmínky pro souvislost a konvexitu množiny optimálních portfolií.
- Ukázali jsme blízkost definic přijatelnosti a optimality.
- Ověřili jsme, že index PX nereprezentuje přijatelné portfolio.

Závěr

- Přístup k hledání optimálního aktiva jsme rozdělili do dvou částí a obě představili.
- Pojednali jsme o konceptu stochastické dominance.
- Formulovali jsme podmínky pro souvislost a konvexitu množiny optimálních portfolií.
- Ukázali jsme blízkost definic přijatelnosti a optimality.
- Ověřili jsme, že index PX nereprezentuje přijatelné portfolio.

Závěr

- Přístup k hledání optimálního aktiva jsme rozdělili do dvou částí a obě představili.
- Pojednali jsme o konceptu stochastické dominance.
- Formulovali jsme podmínky pro souvislost a konvexitu množiny optimálních portfolií.
- Ukázali jsme blízkost definic přijatelnosti a optimality.
- Ověřili jsme, že index PX nereprezentuje přijatelné portfolio.

Závěr

Prostor pro Vaše dotazy.